Integrace substituční metodou

Protože nemáme obecně platný vztah pro integraci součinu, podílu a složené funkce, používáme při výpočtu integrálů složitějších funkcí metodu per partes nebo substituční metodu.

Substituce typu $t=\varphi(x)$

Věta : Nechť funkce $t=\varphi(x)$ má derivaci na intervalu (α,β) a zobrazuje ho na interval (a,b). Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu (a,b). Pak na intervalu (α,β) platí

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt\,,$$

dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t=\varphi(x)$.

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu :

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{subst.}: t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)dx\end{array}\right|=\int f(t)dt=F(t)+c=F(\varphi(x))+c$$

Tato substituce se používá většinou tehdy, řešíme-li integrál ze složené funkce a v integrandu je obsažena i derivace vnitřní složky.
Za novou proměnnou *t* často volíme vnitřní složku $\varphi(x)$ složené funkce.

Abychom určili vztah mezi diferenciálem „původní" proměnné *x* a „nové" proměnné *t*, budeme substituční rovnici diferencovat, tj. vypočítáme derivace obou stran substituční rovnice násobené příslušnými diferenciály proměnných *t* a *x*.
Pak zavedeme do daného integrálu novou proměnnou a dostaneme $\int f(t)\,dt$. Za předpokladu, že umíme najít primitivní funkci $F(t)$, dosadíme do ní na závěr $t=\varphi(x)$, abychom dostali výsledek v původní proměnné *x*.

Příklad : Substituční metodou vypočítejte integrál $\int \cos(7x-18)dx$.
Řešení :

$$\int\cos(7x-18)dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce}:\\ t=7x-18\\ dt=7dx\\ dx=\dfrac{dt}{7}\end{array}\right|=\int\frac{1}{7}\cos t\,dt=\frac{1}{7}\sin t+C=\frac{1}{7}\sin(7x-18)+C$$

Poznámka : Tento integrály bylo možné vypočítat přímo pomocí vzorce V9.

Substituce typu $x = \varphi(t)$

Věta : Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a,b). Nechť prostá funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu (α,β) a zobrazuje ho na interval (a,b). Pak na intervalu (a,b) platí

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt\,,$$

dosadíme-li do primitivní funkce na pravé straně $t = \varphi^{-1}(x)$, kde φ^{-1} je inverzní funkce k funkci φ.

Integraci substituční metodou provádíme podle následujícího schématu :

$$\int f(x)\,dx = \left|\begin{matrix}\text{subst.}: x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt\end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$$

Příklad : Substituční metodou vypočítejte integrál $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$.

Řešení :

$$\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}} = \left|\begin{matrix}\text{substituce:} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt\end{matrix}\right| = \int \frac{2tdt}{(4+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{(4+t^2)} = 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

Doporučené substituce pro některé typy funkcí

Integrace iracionálních funkcí

- Integrál iracionální funkce $\int R\left(x;\sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx$ budeme řešit substitucí $t^n = ax+b$.

Příklad : Vypočítejte integrál $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}\,dx$.

Řešení : $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}\,dx = \left|\begin{matrix}t^2 = x+2 \\ 2tdt = dx\end{matrix}\right| = \int \frac{t}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t}dt = |\text{dělíme}| = 2\int (t-1+$

$+\frac{1}{t+1})\,dt = 2\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2\ln|t+1| + C = x+2-2\sqrt{x+2} + 2\ln\left|\sqrt{x+2}+1\right| + C$

- Integrál iracionální funkce $\int R\left(x;\sqrt[n_1]{ax+b},\sqrt[n_2]{ax+b},\dots,\sqrt[n_k]{ax+b}\right)dx$ budeme řešit substitucí $t^s = ax+b$, kde s je nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Příklad : Vypočítejte integrál $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Řešení : $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx = \left| \begin{matrix} t^6 = x \\ 6t^5 dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5}{\sqrt{t^6}(1+\sqrt[3]{t^6})}dt = 6\int \frac{t^5}{t^3(1+t^2)}dt = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt =$

$= 6\int (1 - \frac{1}{t^2+1})dt = 6t - 6\text{arctg } t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\text{arctg}\sqrt[6]{x} + C$

Integrace goniometrických funkcí

Je-li možné integrovanou goniometrickou funkci upravit na tvar :

- $R(\sin x)\cdot\cos x$, řešíme integrál substitucí $t = \sin x$,
- $R(\cos x)\cdot\sin x$, řešíme integrál substitucí $t = \cos x$,

Pro převod jedné funkce na druhou používáme vztah $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, je-li třeba, rozepíše se lichá mocnina goniometrické funkce v čitateli na součin sudé mocniny a 1. mocniny. V některých případech se funkce vhodně rozšíří.

Poznámka : Při integraci funkcí $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ využíváme pro snížení mocniny goniometrické vzorce $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$

Příklad : Vypočítejte integrály $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

Řešení :

$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}dt =$

$= \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = |\text{dělíme}| = \int 1dt + \int \frac{-2}{t^2+1}dt = t - 2\text{arctg}(t) = \cos x - 2\text{arctg}(\cos x) + C$